Algebra

Algebra blir ofte referert til som "bokstavregning", selv om man nok mister noe av det helhetlige bildet ved å holde seg til en slik oppfatning. Vi velger her å ta med ting som likningsløsning og tallbehandling, mens det som går på mer tallteoretiske temaer blir tatt opp under kapitlet Tallteori. Algebra dreier seg (i likhet med andre matematiske emner) om å se sammenhenger, abstrahere, danne hypoteser, stille opp en symbolsk representasjon av et problem for å kunne løse det matematisk, m.m.
Vi begynner med en av de mer grunnleggende ferdighetene i matematikk, nemlig å løse likninger.

Likningsløsning

Vi har faktisk flere måter å løse en likning på ved hjelp av den grafiske kalkulatoren. Selv om man ved for eksempel en skriftlig eksamen skal vise at man behersker teknikken og teorien for å løse en slik likning, er det egentlig litt merkelig at man ikke har tatt seg tid til å lære seg å bruke kalkulatoren til å undersøke om svaret man har funnet er riktig.
Velg gjerne ut den metoden du liker best, men vi anbefaler *sterkt* at du behersker dem alle! Noen ganger vil en metode være raskere eller enklere enn de andre, mens det andre ganger ikke spiller noen stor rolle hvordan du velger å gjøre det.

Eksempel 1 - førstegradslikning
Som første eksempel skal vi løse en helt vanlig førstegradslikning,

$$2x-\frac{3}{5}=-\frac{2}{7}+3x\,.$$

Det er muligens ikke så mange som kjenner til det, men TI har en innebygd likningsløser. Vi skal benytte oss av **solve(** som vi finner under [CATALOG]-menyen. Trykk først [CATALOG]. Du får da opp en lang, lang liste over mulighetene på kalkulatoren. Vi skal helt ned til s for **solve(**, men for å slippe å bla så langt nedover kan du nå trykke på første bokstaven i det du leter etter. Trykk på [LN]-tasten (Bokstaven S står over denne tasten) for å komme ned til S, og bla videre nedover til du finner **solve(**.

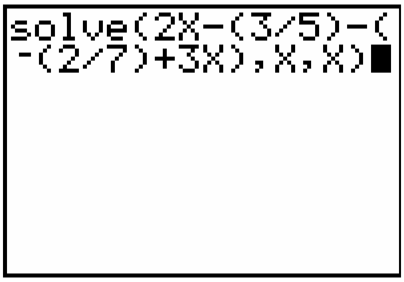
Trykk [ENTER] for å sette dette valget på hovedskjermen.
Vi skal nå legge inn hvilken likning som skal løses. Kalkulatoren kan ikke direkte løse en likning som $2x-\frac{3}{5}=-\frac{2}{7}+3x$.
Den må skrives om slik at det står null på ene siden. Dette gjør du enklest ved å gjøre om likningen fra formen

venstre side = høyre side

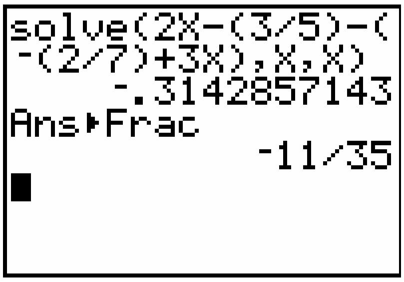
til

venstre side – (høyre side) = 0.

Altså flytter vi bare høyre siden over. Da blir det altså slik: $2x-\frac{3}{5}-\left(-\frac{2}{7}+3x\right)=0$.
Bruker du parenteser slik, slipper du å tenke på skifting av fortegn. På kalkulatoren skriver du bare den siden som ikke er null, og det blir da slik:

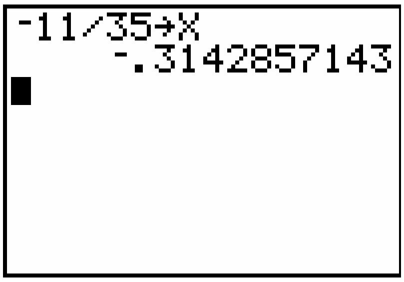


Legg merke til at vi har skrevet ,X,X til slutt. Den første X er skrevet for å fortelle TI at det er X som er den ukjente. Den andre er et gjett på løsningen. Vi brukte her ikke noe spesielt tall for gjetning, og i førstegradslikninger spiller det heller ingen rolle. Dette blir først relevant på likninger med flere løsninger (som for eksempel andregradslikninger). Trykk nå på [ENTER] for å løse likningen. Du får fram at svaret er -0.314... Hvis dette svaret egentlig er en brøk, kan vi få opp denne brøken ved å trykke [MATH][ENTER][ENTER]:

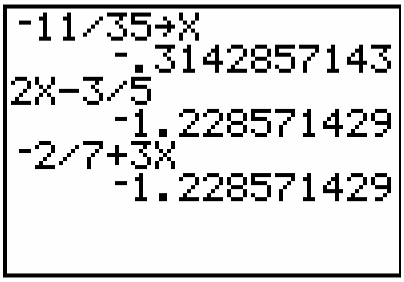


Svaret var altså $-\frac{11}{35}$. ■

Eksempel 2 - å sette prøve
Man kan sjekke om man har regnet riktig ved å sette prøve på svaret. La oss for eksempel anta at vi har regnet på oppgaven i forrige eksempel og fått svaret $-\frac{11}{35}$. Vi sjekker om det er riktig ved å sette inn dette tallet for *x*. La oss først sette denne verdien inn i variablen *x*. Trykk [(-)][1][1][÷][3][5][STO▸][X,T,Θ,*n*][ENTER]



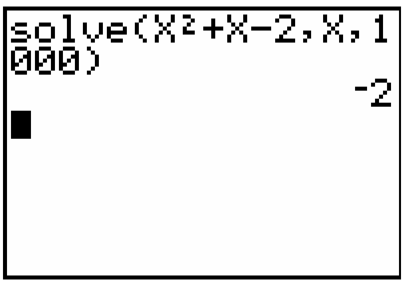
Svaret vårt er nå lagret på bokstaven/variablen *x*. Skriv så inn venstre side av likningen og se hvilken verdi du får. Skriv til slutt inn høyre side og sjekka t du får samme verdien.



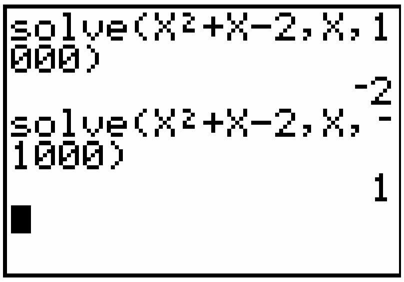
Her ser vi at venstre side og høyre side har samme verdi, altså stemte den *x*-verdien vi hadde regnet ut. ■

Det trenger imidlertid ikke bli bare *ett* svar på en likning. Vi kan ha to eller flere løsninger, for eksempel i andregradslikninger. Andregradslikninger har man stiftet bekjentskap med på grunnkurset i videregående skole. Man har også denne typen likning i grunnskolen, men ikke i fullstendig form. Likninga $x^2 = 9$ ser vi umiddelbart har to løsninger, -3 og +3 (begge passer inn i likningen). Dette er likevel ikke et eksempel som vi ville brukt ABC-formelen på (Selv om det ville ha fungert). Se på følgende eksempel, hvor vi igjen bruker *solveren*.

Eksempel 3 - to svar
Hva skjer hvis likningen har *to* svar? Vi kan fremdeles brukes **solve(**-funksjonen, men vi må finne ett svar om gangen. Dette gjør vi ved å gjette på sånn cirka hvor svaret er. Vi kan komme fram til gjett for dette ved å se på en grafisk framstilling. La oss se på eksemplet med likninga $x^2 + x - 2 = 0$.
Trykk [CATALOG] for å igjen ta fram katalogen med kalkulatorfunksjoner.
Trykk [LN] for å komme fort ned til bokstaven S, og bla deg fram til **Solve(**.
Velg denne ved å trykke [ENTER]. Legg så inn likningen ved å trykke
[X,T,Θ,*n*][x^2][+][X,T,Θ,*n*][−][2][,][X,T,Θ,*n*][,][1][0][0][0][)]
[ENTER]

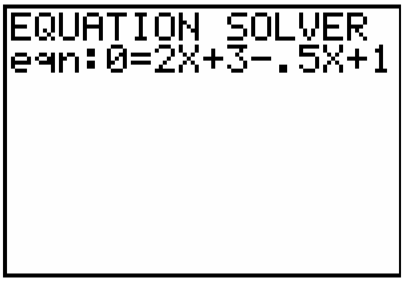


Vi skrev 1000 som et gjett her – kalkulatoren begynner da FRA VENSTRE (er usikker på grunnen!) og finner løsningen -2. Trykk [ENTRY] for å få tilbake forrige utregning. Bytt ut 1000 med -1000 og trykk [ENTER] igjen. Du får det andre svaret:

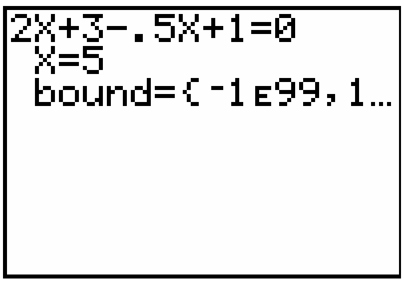


Løsningene på likninga ble 1 og -2. Vi brukte verdien 1000 her ettersom vi var rimelig sikre på at det ikke var større svar på likninga. Hadde dette vært en likning som hadde dreid seg om folketall eller liknende, hadde vi kanskje måttet brukt grenser fra minus flere millioner til pluss flere millioner. ■

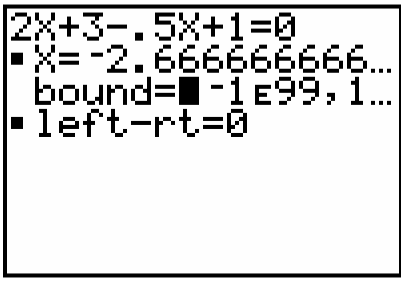
Eksempel 4 - Equation solver
I stedet for menyvalget SOLVE har vi også en likningsløser (equation solver). Disse fungerer på samme måte, men vi tar en gjennomgang likevel.
Trykk [MATH][0] for å få fram "solveren".
Skriv inn en likning der og trykk [ENTER].



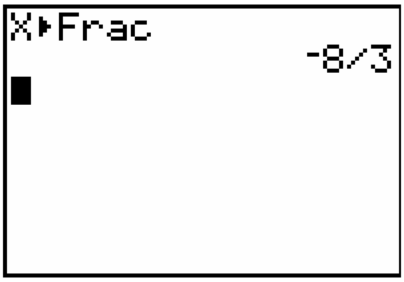
Du får så opp følgende skjermbilde:



Det betyr ikke at x=5! Det betyr bare at jeg gjetter på at x=5. Vi må altså gi kalkulatoren et sted å starte når den skal løse likninger. Det er egentlig det samme hvilket gjett du angir. Trykk nå på [SOLVE] for å løse likninga. Følgende skjerbilde kommer:



Dette betyr at løsningen er -2.666…
Under står det **left-rt=0**, det betyr at kalkulatoren fant en nøyaktig løsning (venstre side minus høyre side er null). Ønsker du å se om svaret kan skrives som brøk, trykker du
[QUIT][X,T,Θ,n][MATH][ENTER][ENTER].



Svaret var altså -8/3. En kjapp oppsummering av fremgangsmåte for likningsløsning:

1. Gå inn på Equation Solver
2. Skriv inn likninga (den må være ordnet slik at den ene sida må være null)
3. Skriv inn begrenser for intervallet du leter etter løsning i (du må oppgi et intervall om gangen for å finne løsningene)
4. Gjett på en løsning
5. Trykk [SOLVE] ■

Eksempel 5 - "likningsløsningsprogram"
Vi kan lage et program som løser andregradslikninga.
En standard andregradslikning har formen

$$ax^2 + bc + c = 0.$$

Slike løsninger kan løses enten ved å lage fullstendig kvadrat (ofte pensum i lærerutdanningen) eller ved den såkalte ABC-formelen. Denne formelen er

$$x = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ettersom vi får såpass ofte bruk for den har man i videregående skole tillatt bruk av kalkulator på akkurat denne typen likninger.
Programmet som løser likningen kan for eksempel være slik:

```
PROGRAM: ANDREGR
: Disp"AX^2+BX+C=0
: Prompt A
: Prompt B
: Prompt C
: B^2-4AC→D
: If D<0

: Then
: Disp"Ingen svar"
: Else
: -b/(2A) →X
: If D=0
: Disp"X=",X→Frac
: End
: If D>0
: Then
: (-B+√(D))/(2A) →X
: Disp"X1=",X→Frac
: (-B-√(D))/(2A) →X
: Disp"X2=",X→Frac
: End
```

Man kan selv lage programmet som løser andregradslikningen. En ekstra utfordring kan være
- Hvor kort kan man lage dette programmet for å løse andregradslikninger?

Eksempel 6 - en kort likningsløser
Et kort forslag til løsning følger her. Siden programmet er så mye brukt kaller vi det bare for "A" for at det skal ligge høyt oppe på listen over programmer (de blir sortert alfabetisk). Dermed er det fort gjort å få tak i det. Du må gjerne skrive et annet navn i stedet for A.

```
PROGRAM:A
:Prompt A,B,C
:Disp(-B+√(BB-4*A*C)) / (2*A) →FRAC, -B-√(BB-4AC))/(2A) →FRAC
```

Vi finner FRAC ved å trykke MATH ENTER. Du kan selvfølgelig gjerne bruke B^2 i stedet for å skrive BB. Man får ikke komplekse løsninger med disse versjonene av andregradsprogrammet, og man får heller ikke tilbakemelding om hva som går galt hvis man for eksempel får et negativt tall under rottegnet. ■
Programmer som løser andregradslikninger står beskrevet for eksempel i læreboka Sinus 1MXY, og er lovlig til bruk på eksamen.

Likningssett med flere ukjente

Vi skal nå løse likningssett der vi har to likninger med to ukjente. På kalkulatoren kan vi gjøre dette ved å finne skjæringspunkt mellom to linjer.

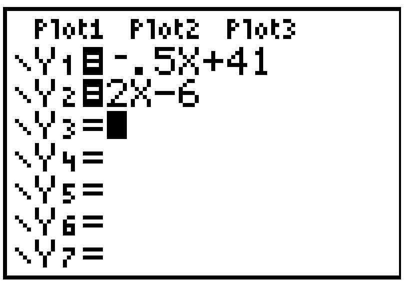
Eksempel 7 - to likninger med to ukjente; grafisk løsning
Vi tar for oss likningssettet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ -2x + y &= -6 \end{aligned}.$$

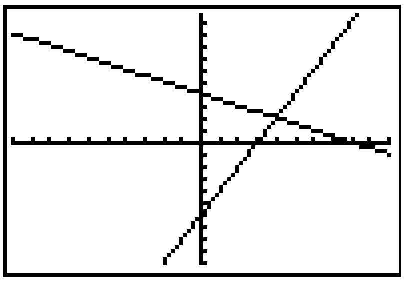
Først rokkerer vi litt på likningssettet slik at vi får to uttrykk med hensyn på *y*:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x + 4 \\ y &= 2x - 6 \end{aligned}.$$

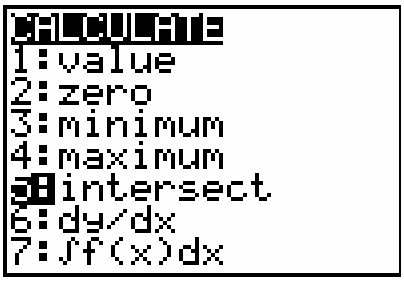
Trykk Y= for å tegne inn disse to funksjonene på TI83. Husk at du her må bruke (-)-tasten for å lage minustegnet foran $\frac{1}{2}$, siden det dreier seg om et fortegn og ikke operasjonen "minus".



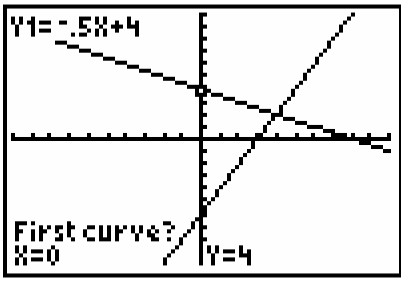
Grafene ser slik ut:



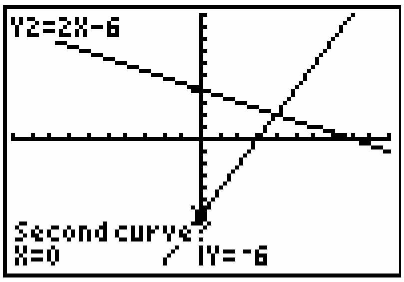
Vi ser at disse to funksjonene har ett punkt felles. Her har de felles *x* og y! Dette punktet kan vi finne. Gå inn på [CALC]-menyen og velg **5:Intersect**.



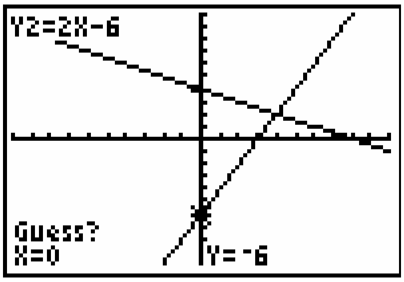
Vi må da først velge første kurve/graf, så andre kurve/graf og til sist gjette på omtrent hvor de møtes. Som før, er vi ikke nødt til å gjette – vi kan bare trykke [ENTER]. Slik gjør vi:



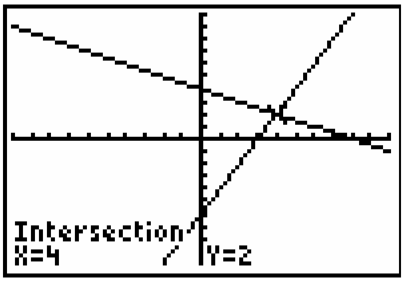
Her har markøren allerede stilt seg på den første kurven (den gjør det automatisk når det bare er to grafer). Trykk [ENTER] for å velge denne som første graf.



Her får du spørsmålet om andre kurve. Også den blir automatisk valgt. Trykk [ENTER] for å velge denne.



Her spør TI om du vil gjette på en verdi. Som nevnt, dette er ikke nødvendig så lenge det ikke er kompliserte saker vi regner på. Bare trykk [ENTER] så starter TI på utregningen av svaret. Straks kommer svaret opp, som på bildet under.



Som vi ser på skjermbildet, løsningen på likningssettet er x=4 og y=2. ■

Eksempel 8 - to likninger på equation solver

Likningssettet er altså

$$x + 2y = 8$$

$$-2x + y = -6$$

La oss først sortere slik at vi får y alene på den ene siden i begge uttrykkene. Da får vi

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$y = 2x - 6$$

.

Setter vi de to y'ene like hverandre (det må jo være samme y'en!) får vi

$$-\frac{1}{2}x + 4 = 2x - 6.$$

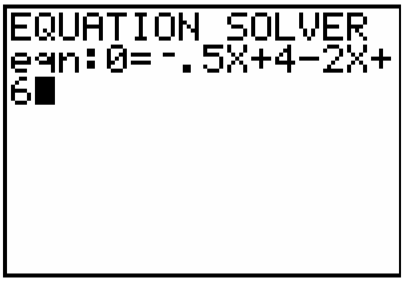
Likningsløseren på TI baserer seg altså på at den ene siden er null, slik at vi må skrive om likningen som

$$-\frac{1}{2}x + 4 - 2x + 6 = 0.$$

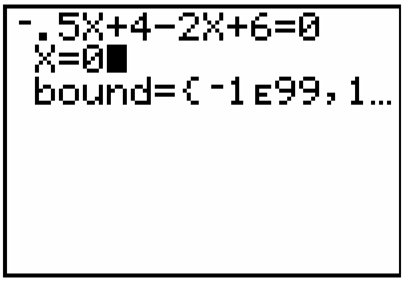
Husk skifting av fortegn når vi flytter over. Ville vi fortsatt løsningen for hånd ser vi at en sammentrekning av dette uttrykket gir

$$-\frac{5}{2}x+10=0$$

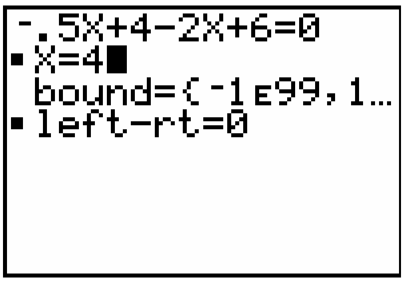
Her kan vi ganske enkelt løse denne likningen, slik at vi får x=4.
Hadde det imidlertid vært vanskeligere uttrykk / vanskeligere likninger, kunne vi ha tastet inn uttrykket før forenkling rett inn på TI, slik:
Gå inn på solveren ([MATH][0]). Legg der inn likningen som vist:



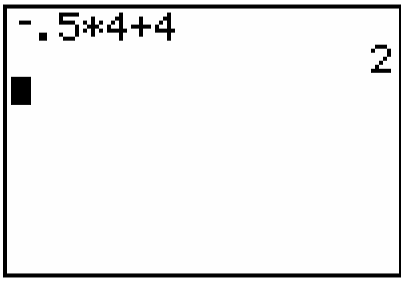
Trykk [ENTER] for å gå ut til likningsløsningen:



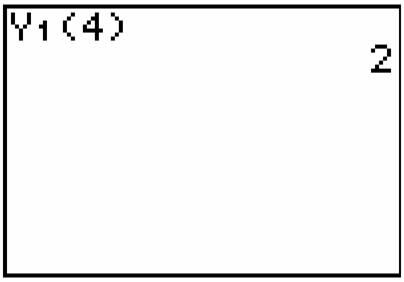
Du kan skrive inn en eller annen verdi der det står x=. Dette er bare for å gi kalkulatoren noe å starte med. "**bound**" angir nedre og øvre grense for hvor løsningen skal ligge. Her kan du fylle inn grensene selv, eller akseptere at de ligger mellom det minste og det største tallet TI kan håndtere. Trykk så på [SOLVE] for å finne løsningen:



Vi ser at tallet som stod bak x= endret seg til 4, som betyr at svaret er 4. Igjen får vi **left-rt=0**, som betyr at svaret er nøyaktig.
Dette var x-verdien. For å finne y-verdien som hører til, setter vi x-verdien 4 inn i et av uttrykkene for y:

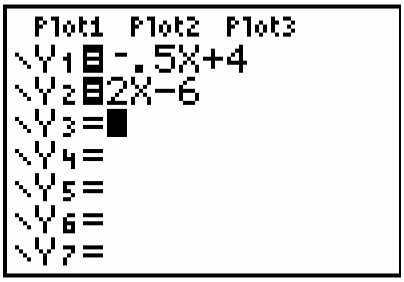


Her satte vi 4 inn i $y=-\frac{1}{2}x+4$, og fikk y-verdien 2.
Løsningen på oppgaven er altså x=4, y=2. Vi kunne også funnet y-verdien ved å sette inn på kalkulatoren (altså uten å regne det ut selv, som nå). Da trykker vi på [VARS][▸][1][1][(][4][)][ENTER]

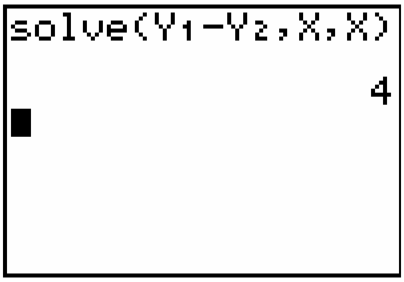


Her ser du at vi brukte direkte innsetting på kalkulatoren. ■

Eksempel 9 - to likninger med solve(
En slags kombinasjon av de to foregående eksempler ville være å bruke *funksjonseditoren og* **solve(** samlet.
Legg inn de to uttrykkene for y på funksjonseditoren:



Ta fram solveren igjen og legg inn følgende to likninger (husk at du finner Y-variablene (Her Y_1 og Y_2) ved å trykke [VARS][▸][1] og derfra velge en av disse om gangen):



Vi fant altså x-verdien 4, og da er det lett å finne y-verdien på samme måte som i forrige eksempel. Har man lært seg denne metoden, er kanskje det den raskeste? ■

Eksempel 10 - to likninger med matrisemetoden

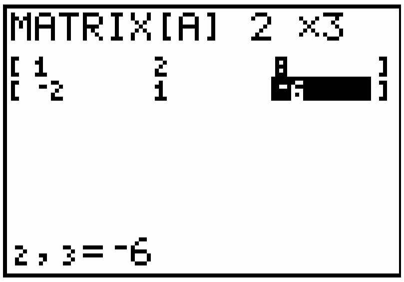
Vi kunne også ha løst dette likningssettet uten å benytte grafer og funksjoner. Det er dessverre ikke innebygd noen automatisk likningssløser for likninger med flere ukjente, men det fins råd. I mer avanserte matematikkurs bruker man *matrisemetoder* for å løse slike likninger. På TI kan vi bruke denne metode. Vi tar ikke med noen gjennomgang av teorien, da den faller utenfor grunnkursets pensum.

Trykk på [MATRIX] for å gå inn i matriseeditoren (Slapp av, verken Neo eller Mr. Smith kommer til å dukke opp).

Trykk [◂] for å komme til EDIT-menyen. Trykk så [ENTER] for å velge å endre på matrisen med navnet **A.** Skriv inn at matrisen skal ha dimensjonen 2 x 3. Hvorfor skal den ha denne dimensjonen? Se igjen på likningssettet:

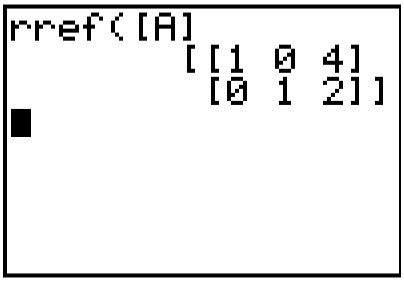
$$x + 2y = 8$$
$$-2x + y = -6$$

Det vi trenger i matrisa vår er tallene foran x og y, samt konstantleddet på høyre side. Altså er det to rader nedover og tre kolonner bortover. Vi skal så fylle inn disse koeffisientene i matrisa. Se figuren under:



Trykk [QUIT] for å gå tilbake til hovedskjermbildet. Nå skal vi løse likningssettet. Det gjør vi med følgende tastetrykk:

[MATRIX][▸][▴][▴][▴][▴][▴][ENTER][MATRIX][ENTER][ENTER]



Her står det nå egentlig:

$$1x + 0y = 4$$
$$0x + 1y = 2$$

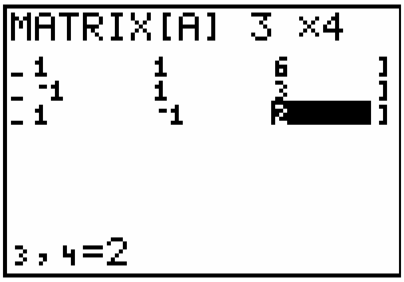
Vi leser dette slik: 1x og 0y er 4, det vil si at x=4. 0x og 1y er 2, altså y=2. Som vi ser ble det samme svar som med den grafiske metoden! Denne metoden er imidlertid like grei å bruk hvis vi har flere enn to likninger også. Har vi for eksempel 4 likninger med 4 ukjente, lager vi ei matrise med dimensjoner 4 x 5, fyller inn koeffisientene og bruker igjen **rref(**- funksjonen. Denne funksjonen står for *row reduction* og hører altså til i mer avanserte kurs i lineær algebra. Metoden er også nevnt med kalkulatorframgangsmåte i boka SINUS 1mxy. ■

I grunnskolen kommer man nok ikke ut for mer enn to likninger og to ukjente samtidig. Som lærer bør du likevel være klar over at det ikke er noen grense for hvor mange ukjente man kan ha. Men man må ha like mange likninger som ukjente (like mange opplysninger som ukjente).

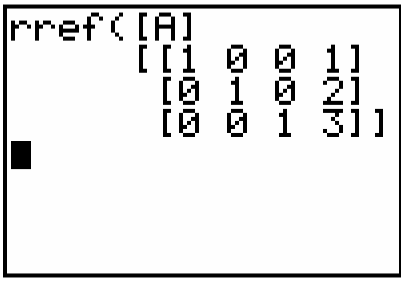
Eksempel 11 - tre likninger med tre ukjente
Som et siste eksempel på likninger med flere ukjente viser vi raskt at teknikken med to ukjente i forrige eksempel også kan brukes for flere. La oss løse likningssystemet:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ 2x-y+z &= 3 \\ 3x+y-z &= 2 \end{aligned}.$$

Vi trykker da igjen inn på [MATRIX][◄][ENTER] for å komme til **EDIT**-menyen. Skriv inn koeffisientene (tallene foran de ukjente) i matrisen (ikke alle tallene vil synes på skjermen samtidig):



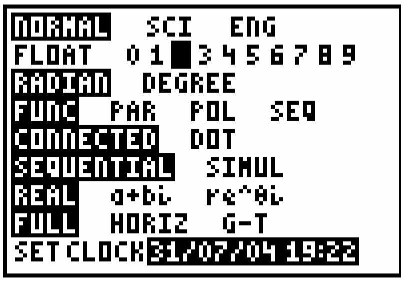
Gå til hovedskjermen ved å trykke [QUIT]. Trykk [MATRIX][►][▲][▲][▲][▲][▲][ENTER][MATRIX][ENTER][ENTER] for å løse likningssettet.



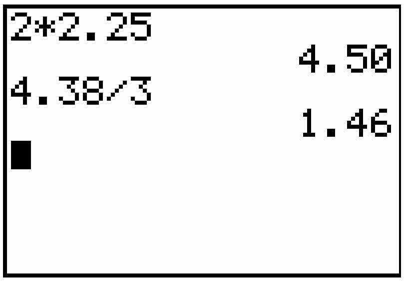
Vi ser at løsningen er x=1, y=2 og z=3.

Innstilling for kroner og øre

Det kan være greit å bruke bare to desimaler når man for eksempel regner med penger/valuta. For å stille inn TI til å bruke to desimaler gjør du slik: [MODE][▼][►][►][►][ENTER]. Displayet vil da se slik ut:



Markøren skal stå på 2-tallet.[1] Trykk [2nd][MODE] (som betyr [QUIT] - begynner du å få taket på dette nå?) for å komme til hovedskjermbildet igjen.



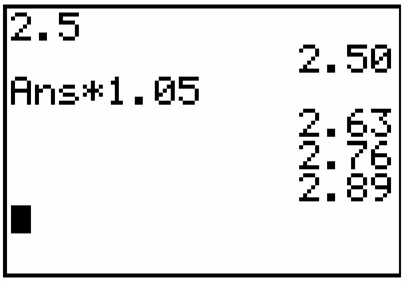
Som du ser bruker TI nå konsekvent tall rundet av til to desimaler. For å stille tilbake går du igjen til [MODE]-vinduet og velger FLOAT (for flyttall).

Renters rente

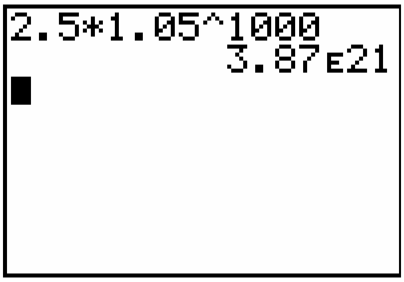
Det er ikke så vanskelig å komme i gang med å regne med renters rente. Se på følgende eksempel.

Eksempel 12 - laaaang sparing
Fry setter inn 2 kroner og femti øre i verdensbanken før han havner i en tidsmaskin som fryser han ned i 1000 år. Banken har gjennomsnittlig holdt 5% rente pr. a. Hvor mye kunne han ta ut etter opptiningen?

[1] Dette er et av de få skjermbildene som er forskjellige på TI83+ og TI84+. Alt som står på skjermen er imidlertid likt, kun layouten differer.



Vi innser at det kan bli litt slitsomt å trykke på enter-tasten tusen ganger.



Her ser vi igjen hvordan TI benytter eksponensiell notasjon (standardform). Dette svaret betyr 3.87 ganget med 10 opphøyd i 21. Det vil si 2.87 ganget med et ettall med 21 nuller bak. Tallet er da 3870000000000000000000. Altså nesten fire tusen millarder milliarder kroner. (Hva vil skje den dagen tidsmaskiner er en realitet og alle kan la seg fryse ned i tusen år og etterpå være multi-millardærer?) ■

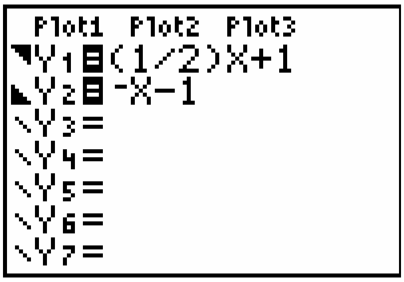
Ulikheter

Et naturlig neste skritt etter at man har lært noe om likninger – altså en skålvektverden der det er like mye på hver side – er at man går over i ulik-verden, der den ene skålvekta hele tida skal være tyngre enn den andre.

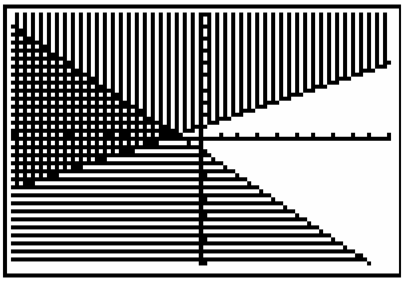
Eksempel 13 - lineær programmering

Finn og vis hvilke områder i planet som tilfredsstiller både $y \geq \frac{1}{2}x+1$ og $y \leq -x-1$.

Legg først inn på *funksjonsskjermen* uttrykkene. Så må du velge en type skravering. Vi skal jo finne verdier som ligger over eller under disse linjene, og ikke *på* dem. Flytt markøren til venstre for hver funksjon og velg "over"-symbolet på $y \geq \frac{1}{2}x+1$ og "under"-symbolet på $y \leq -x-1$. Vi kunne også kalt disse "større-enn" og "mindre-enn" symbolene, men da blander vi kanskje sammen med > og <.



Trykk på GRAPH for å skisser ulikhetene.



Vi ser at det området som er skravert av begge tilfredsstiller begge ulikhetene samtidig. ■

Litteratureksempler

Matematikk for lærere
Algebra og funksjonslære